Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Математические основы судовождения

Направление подготовки 26.05.05 Судовождение

Специализация «Судовождение на морских путях»

Мурманск
2023

Составитель: Пашенцев С.В., канд. физ.-мат. наук, профессор,
профессор кафедры судовождения ФГАОУ ВО «МАУ»

Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины «Математические основы судовождения» рассмотрены и одобрены на заседании кафедры судовождения
«11» 09 2023г., протокол № 01/23.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания составлены на основе ФГОС ВО по специальности 26.05.05 Судовождение, утвержденного Министерством науки и образования РФ 15.03.2018 приказ № 191, требований Международной Конвенции ПДНВ (с поправками) для конвенционных специальностей ИМА МГТУ, образовательной программы по специальности 26.05.05 Судовождение, специализации «Судовождение на морских путях».

Дисциплина «Математические основы судовождения» (МОС) относится к блоку обязательных дисциплин, и предназначена для курсантов 5 семестра обучения специальности «Судовождение».

Самостоятельная работа является одним из важнейших видов учебных занятий. Она проводится вне сетки аудиторных часов, выполняется курсантом по указаниям преподавателя, но без его непосредственного участия.

Целью самостоятельной работы является:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубление и расширение теоретических знаний, полученных в лекционном курсе;
- формирование умения использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу по дисциплине;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и самоорганизованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие базовых исследовательских навыков.

В процессе обучения кроме лекций и лабораторных занятий, курсанты проводят самостоятельное изучение ряда тем, выполняют один курсовой проект, сдают экзамен.

Решение задачи подготовки квалифицированного специалиста соответствующего уровня и профиля невозможно без повышения роли самостоятельной работы обучающихся над учебным материалом.

Содержание самостоятельной работы по курсу определено учебным планом и рабочей программой данной дисциплины, разработанных в соответствии ФГОС ВО по специальности 26.05.05 «Судовождение».

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС ВО и требованиями Конвенции ПДНВ по специальности 26.05.05 Судовождение, специализации «Судовождение на морских путях».

Таблица 1 -Технологическая карта текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине МОС (финальная аттестация - экзамен)

№		Зачетное количество	График

	Контрольные точки	баллов		прохождения (недели сдачи)
		min	**min**	
Текущий контроль				
1.	Выполнение лабораторных работ	10	20	
2.	Тестовый контроль	5	10	
3.	Посещение занятий	5	10	
4.	Своевременная сдача контрольных точек	2	3	
	ИТОГО	**22**	**43**	
Промежуточная аттестация				
	Курсовой проект	20	40	
	Экзамен	8	17	
	ИТОГОВЫЕ БАЛЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	**50**	**100**	

Таблица 2 - Технологическая карта промежуточной аттестации по дисциплине МОС (промежуточная аттестация - курсовой проект)

№	Критерии оценивания	Зачетное количество баллов		График прохождения (недели сдачи)
		min	**min**	
Выполнение курсовой работы/проекта				
1.	Своевременная сдача на проверку курсового проекта	min	max	
	ИТОГО	min - 60	max - 80	
Промежуточная аттестация				
	Защита курсового проекта	min – 10	max - 20	
	ИТОГОВЫЕ БАЛЛЫ ЗА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ	**min - 70**	**max - 100**	

Таблица 3 Тематический план

№	Наименование тем и содержание самостоятельной работы	Кол-во часов
1	Угловая информация, формы представления, перевод между ними	4
2	Работа с таблицами для 3-х аргументов	6
3	Решение сферических треугольников частных видов	10
4	Малые сферические треугольники	2
5	Доверительное оценивание результатов наблюдений	8
6	Распространение погрешностей функций многих аргументов	8
7	Последовательное оценивание Фильтр Калмана	12
8	Операции над векториальными погрешностями: разложение, объединение многих погрешностей	14
9	Обработка избыточной информации - более 3-х наблюдений	12
10	Оптимальная аппроксимация опытных данных	8
11	Работ по теме курсового проекта	30

	ИТОГО	114

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература
1. Волынский Б.А. Сферическая тригонометрия. - Наука,2007 г.
2. Пашенцев С.В. Лекции по курсу. Электронный ресурс . МГТУ, 2017г.
3. Пашенцев С.В. Методические указания по самоподготовке. Электронный ресурс. МГТУ. 2017 г.
4. Пашенцев С.В. Методические указания по выполнению РГР. Электронный ресурс. МГТУ. 2017
5. Пашенцев С.В. Оценка точности задач судовождения. МГАРФ, Мурманск. 2010
6. Пашенцев С.В. Методические указания к выполнению курсового проекта по МОС. Электронный ресурс № 0321103437 МГТУ. 2012

Дополнительная литература
7. Кондрашихин В.Т. Теория ошибок. - М: Транспорт, 1969г.
8. Пашенцев С.В. Статистическая обработка результатов наблюдений. - Мурманск: МГАРФ, 1993г.
9. Кожухов В.П. Математические основы судовождения. - Л: Транспорт, 1986г.
10. Вульфович Б.А., Пашенцев С.В. Вычислительные аспекты обработки навигационной информации. - Мурманск: МГАРФ, 1980
11. Вульфович Б.А., Пашенцев С.В. Сферическая геометрия и тригонометрия. - Мурманск: МГАРФ, 1985
12. Вульфович Б.А., Пашенцев С.В. Основные принципы теории случайных погрешностей - Мурманск: МГАРФ, 1985
13. Вульфович Б.А., Пашенцев С.В. Системы случайных величин на плоскости и их распределения - Мурманск: МГАРФ, 1986
14. Таблицы МТ-75, МТ-2000. ГУНИО.2020

СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Угловая информация, формы представления, перевод между ними.

Отрабатываются различные формы представления угловой информации, которые существуют в навигации. А также связь между ними и перевод одних форм измерения в другие.

Методические указания

Курсант должен знать, какие способы измерения углов применяются в навигации, и уметь переводит одни формы в другие разными способами с использованием калькулятора и таблиц. Должен знать, сколько десятичных знаков следует сохранять в результатах с учетом точности исходной информации.

Литература: [1], [2], [10], [13].

Вопросы для самопроверки

1. Как перевести угол 105.3? в радианную меру, во временную меру?
2. Сколько десятичных знаков следует сохранить в каждой из этих мер?

Тема 2. Работа с таблицами для 3-х аргументов.

Отрабатываются навыки работы с таблицами трех входов (аргументов), наиболее сложными для интерполяции. Работы ведутся с двумя таблицами этого типа из МТ-75 (2000) – табл.18 и 23б.

Методические указания

.Произведите самостоятельно интерполяцию по трем аргументам в табл. 23б. Возьмите две точки на земной поверхности с координатами до десятых долей минуты и найдите с помощью таблицы поправки к расстоянию между ними и направлению с одной точки на другую. Рассмотрите два варианта – точки расположены в одном полушарии и в разных полушариях. Затем вычислите разницу между локсодромическими и ортодромическими дистанциями и пеленгами и сравните с табличными значениями.

Литература: [1], [2], [13].

Вопросы для самопроверки

1. В чем специфика работы с таблицами 3-х аргументов?
2. Какие таблицы в МТ-75 имеют 3 аргумента?
3. Как учитывается при интерполяции третий аргумент?

Тема 3. Решение сферических треугольников частных видов

Отрабатываются способы решения сферических треугольников шести различных типов. Для каждого вида определяется однозначно способ решения и способ контроля. Все решения строятся так, чтобы не использовались для определения углов синусы (только косинусы и котангенсы), а найденные элементы не участвовали в дальнейших расчетах вплоть до контроля решения всего треугольника.

Методические указания

Взять все типы треугольников и провести полное решение с оценкой точности каждого из них. Проконтролировать правильность решения, оценив точность различными методами: табличным, непостредственным дифференцированием и методом математического эксперимента.

Литература: [1], [2], [3], [10]

Вопросы для самопроверки

1. Почему не следует использовать для решения синус угла?
2. Почему не следует использовать найденный элемент треугольника в дальнейшем решении?
3. С помощью каких формул производится контроль решения треугольника?

Тема 4. Малые сферические треугольники

Изучается решение малых сферических треугольников, у которых один из углов и одна из сторон намного меньше чем остальные. Это такие элементы, для которых с приемлимой для навигации точностью синус угла и сам угол можно считать равными. Такие треугольники могут решаться по более простым формулам.

Методические указания

Выведите самостоятельно простые формулы малого сферического треугольника с учетом приближенного равенства sin(x) = x или tg(x)=x.

Литература: [1], [2], [3], [10].

Вопросы для самопроверки

1. Какова погрешность приближенной формулы sin(x) = x.?
2. Какова погрешность приближений tg(x) = x и cos(x) = 1 - x2/2

Тема 5. Доверительное оценивание результатов наблюдений.

Отрабатывается доверительный подход к оценке точности наблюдений. Производится интервальная оценка результатов на базе полученной предварительной точечной оценки, т.е. среднего значения наблюдаемого параметра и его СКП. Достигается понимание того, что при заданной погрешности индивидуальных наблюдений невозможно достичь одновременно высокой надежности оценки и узкого доверительного интервала.

Методические указания

Рассмотреть формулы, которые связывают погрешность единичного измерения, число измерений, доверительный интервал и надежность оценки в случае большого числа измерений (Лаплас) и малого числа измерений (Стьюдент). Изучить четыре возможных задачи по доверительным оценкам, когда три параметра из указанных четырех заданы, а следует определять один искомый параметр.

Литература: [1], [4], [9], [10], [11].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое доверительная оценка результата наблюдения?
2. Как количественно связаны ширина доверительного интервала и надежность?
3. Что следует предпринять для одновременного улучшения доверительной оценки по ширине интервала и надежности ?
4. Что такое малое число наблюдений ?

Тема 6. Распространение погрешностей функций многих аргументов.

Отрабатывается получение оценки функции случайных аргументов, полученных в наблюдениях. Это среднее значение и СКП функции, которая непосредственно не наблюдается.

Методические указания

Получить у преподавателя формулу физического характера, которая выражает зависимость ненаблюдаемой функции от наблюдаемых (т.е.

случайных) параметров. Найти среднее и СКП этой функции, если заданы средние значения и СКП наблюдаемых параметров и коэффициент корреляции между ними.
Литература: [1], [4], [9], [10], [11].
Вопросы для самопроверки
1. Какова общая формула для СКП функции случайных аргументов?
2. Каковы частные случаи этой формулы?
3. Идеальный случай нулевой погрешности суммы двух случайных аргументов.

Тема 7. Последовательное оценивание. Фильтр Калмана.
Вырабатывается понимание того, что при больших объемах наблюдений и их изменчивости обычная обработка обладает рядом недостатков, которые сводятся к излишней трате ресурсов вычислительных систем (времени обработки и используемой памяти). Наиболее прогрессивной является последовательное рекуррентное оценивание, лишенное указанных недостатков. Именно это и называется фильтром Калмана, реализуемого практически во всех устройствах обработки информации, связанных с навигацией.
Методические указания
Возьмите ряд обычных наблюдений любого навигационного параметра, и подсчитайте среднее и СКП обычным образом. Затем проделайте их оценку с помощью формул последовательного оценивания. Сравните результаты. Используйте для расчетов пакет Excel.
Литература: [11].
Вопросы для самопроверки
1. Насколько отличаются результаты двух способов оценивания?
2. Каковы недостатки последовательного оценивания?

Тема 8. Операции над векториальными погрешностями: разложение, объединение многих погрешностей.
Отрабатывается работа с векториальными погрешностями. Помните, что это погрешности, которые имеют не только величину, но и направление. Это можно делать с помощью выведенных в литературе [5] формул или указанных графических приемов.
Методические указания
Возьмите три векториальных погрешности, которые не сильно отличаются друг от друга по величине. Расставьте их равномерно в полном круге, так что они имеют направления, отличающиеся примерно на 120 градусов. Сложите их попарно. Проведите их сложение с помощью формул. Сложите две из них и из результата вычтите третью погрешность. Сделайте это графически и с помощью формул.
Литература: [5].
Вопросы для самопроверки
1.Что такое векториальная погрешность?
2. Что такое эллипс погрешностей?

3. Чем определяется эллипс погрешностей ?

Тема 9. Обработка избыточной информации - более 2-х наблюдений

Отрабатывается применение метода наименьших квадратов (МНК) для обработки избыточных наблюдение. Рассматривается решение нескольких уравнение (> 2) с двумя неизвестными. Вводятся понятия невязок каждого уравнения, и минимизируется сумма их квадратов.

Методические указания

Взять три уравнения с двумя неизвестными, и на их примере проследить все этапы минимизации.

Литература: [5], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое невязка уравнения?
2. Какова погрешность решения системы уравнение методом наименьших квадратов?

Тема 10. Оптимальная аппроксимация опытных данных

Изучается более общий случай применения метода наименьших квадратов. В этом случае мы решаем не систему линейных уравнений, а по опытным данным определяем коэффициенты разложения функции по некоторому набору стандартных функций, например степенных или тригонометрических.

Методические указания

Взять судовую таблицу компасной девиации и подсчитать для нее коэффициенты разложения девиации по целым, удвоенным и учетверенным углам. Рассчитать несовпадение расчетных значений с данными исходной таблицы.

Литература: [5], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое аппроксимация?
2. Как находятся коэффициенты аппроксимационных формул?

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для курсантов судоводительского факультета, выполняющих курсовой проект по дисциплине “Математические основы судовождения” (МОС) в соответствии с учебным планом специальности 200400 “Судовождение”. Целью настоящих указаний является определение основных требований, которые предъявляются к структуре, содержанию и оформлению курсового проекта. Перед выполнением курсового проекта курсант обязан ознакомиться с существом этих требований, содержащих все вопросы, ответы на которые он должен дать при защите курсовой работы.

Курсовой проект выполняет функции завершающего и подводящего итоги этапа обучения дисциплине МОС и выполняется самостоятельно под руководством преподавателей, ведущих на кафедре дисциплину “Математические основы специальности ”.

Тематика курсового проекта базируется на том, что знание собственного места судна и особенно его точности самым непосредственным образом связаны с безопасностью мореплавания и выполнения вахтенным офицером своих функциональных обязанностей. Поэтому совершенное умение оценить погрешности места в различных обстоятельствах плавания составляет важнейший аспект подготовки инженера-судоводителя.

Практическая задача, решаемая в курсовом проекте, состоит в следующем. В начальной точке плавания, например, перед снятием судна с якоря вблизи берега, определяется или уточняется место с помощью трех визуальных или радиолокационных ориентиров.

Снятые несколько раз пеленги (дистанции) обрабатываются способами, изученными в течение семестра, и находятся их статистические характеристики: средние значения и стандартные погрешности, а также возможные корреляции.

Строится карта-схема района в проекции Меркатора; графически, по трем пеленгам, дистанциям или их комбинации при помощи нанесения соответствующих линий положения (ЛП) определяется место судна. Оценивается его точность путем вычисления параметров стандартного (среднего квадратического) эллипса погрешностей и затем дается сравнительная характеристика точности различных методов обсервации путем сравнения эллипсов по их размерам и конфигурации. Конфигурация может оказаться решающей при учете особых обстоятельств плавания, например, при плавании в узкости.

Производится счисление плавания из обсервованной точки при заданном гирокомпасном курсе и плавании при заданных погрешностях поправок лага и компаса. После окончания плавания оценивается точность точки, полученной счислением. Ее погрешность есть комбинация двух эллиптических погрешностей: исходной погрешности обсервованной точки и погрешности самого счисления. В итоге оценивается безопасность положения конечной точки маршрута относительно линии навигационной опасности, заданной в работе.

Методическая задача курсового проекта и всего курса МОС в целом состоит в привитии устойчивого стереотипа точностного мышления, понимания того, что все определяемые реально параметры состояния и движения судна содержат погрешности. Поэтому все решения по управлению этим потенциально опасным объектом, принятые на их основе, всегда сопряжены с определенным риском. Умение оценить долю этого риска, связанную с погрешностями места судна, и закрепляет настоящий курсовой проект.

1. КУРСОВОЙ ПРОЕКТ В УЧЕБНОМ ПЛАНЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Курсовой проект является заключительным этапом в изучении дисциплины "Математические основы специальности", ее выполнение служит подтверждением практического освоения теоретического материала дисциплины и умения приложить эти знания к жизненно важной задаче безопасного судовождения.

1.2. Допуск к экзамену по дисциплине разрешается только при условии успешной защиты настоящей курсового проекта.

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

2.1. Формулировка задания для курсового проекта

Задание для курсового проекта выдается индивидуально для каждого курсанта. Оно генерируется специальной программой из пакета «Рабочее место преподавателя МОС» и гарантирует тем самым оригинальность данных каждой работы.

Сами данные состоят из задания координат трех навигационных ориентиров и результатов ряда наблюдений пеленгов и дистанций до этих ориентиров.

Заданы значение плавания, гирокомпасный курс судна, а также погрешности поправок лага и гирокомпаса.

Требуется:

- обработать результаты наблюдений пеленгов и дистанций для трех заданных навигационных ориентиров, получив средние значения и средние квадратические погрешности средних значений,

- построить карту-схему района плавания в меркаторской проекции, оформить ее рамку согласно стандарту и нанести на нее заданные навигационные ориентиры,
- определить графически место судна двумя способами – по трем пеленгам и по трем дистанциям и записать их координаты, сняв с карты-схемы,
- рассчитать параметры стандартных эллипсов погрешностей для определения места судна этими двумя способами, с помощью МТ-75 пересчитать их в соответствующие радиальные погрешности места надежности 95%,
- на отдельной кальке нанести стандартные эллипсы в увеличенном масштабе, сохранив их ориентацию на карте-схеме,
- рассчитать и нанести на карту-схему круги для надежности 95%,
- нанести отрезок пути (плавание) судна, учтя поправки лага и гирокомпаса, начав его с любой из двух обсервованных точек,
- оценить точность счисления конечной точки плавания с помощью эллипса погрешностей счисления,
- оценить суммарную погрешность конечной точки, объединив эллиптические погрешности исходной точки плавания и произведенного счисления,
- нанести на кальку в выбранном ранее масштабе эти эллиптические погрешности
- нанести на карту-схему круговую погрешность конечной точки плавания для надежности 95%
- рассчитать вероятность безопасного нахождения судна относительно навигационной опасности, положение которой указано в варианте задания удалением и направлением.

Исходные данные, выдаваемые для выполнения курсовой работы, приведены в Приложении №1.

2.2. Состав курсового проекта

Курсовой проекта состоит из текста, отражающего производимые вычисления и пояснения к ним и иллюстративного графического материала в виде карты-схемы и калек с эллипсами погрешностей.

2.3 Текстовая часть курсового проекта

Текстовая часть работы включает в себя:

- титульный лист, оформленный согласно Приложению №2,
- оглавление с указанием номеров разделов,
- формулировку задания на курсовую работу, сгенерированного программой,
- расчет средних значений навигационных параметров и их СКП в форме шести таблиц,
- расчет параметров стандартных эллипсов погрешностей обсервованного места, самого счисления и конечного счислимого места,
- пересчет этих характеристик точности в круги для надежности 95%,
- заключение с выводом о сравнительной точности двух методов обсервации,
- расчет координат среднего взвешенного места судна,
- список использованной при выполнении работы литературы.

Каждый этап расчета должен предваряться соответствующими общими формулами, и лишь затем по ним производится сам расчет с указанием подставленных данных.

2.4 Графическая часть курсового проекта

Графическая часть работы включает в себя:

- карта-схема района плавания на миллиметровом планшете размера А4 с рамкой стандартного оформления карт,
- нанесенные на карту-схему ориентиры и графическое определение места с проведением соответствующих линий положения (ЛП),
- нанесенная на карту путевая линия судна со стандартным оформлением пути, начальной и конечной точек,

- изображение на отдельных кальках стандартных эллипсов погрешностей двух обсервованных точек, эллипсов счисления и конечной точки плавания.

2.5.Выполнение курсового проекта базируется на задании, которое формирует индивидуально для каждого курсанта программный комплекс “Рабочее места преподавателя МОС”.

3. ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

3.1. Курсовой проект оформляется в виде брошюры включающей титульный лист, текст на форматных листах, карту-схему, выполненную на миллиметровой бумаге стандартного формата А4 в меркаторской проекции и эллипсов погрешностей, выполненные на отдельных кальках размером в четверть формата А4 .

3.2.Каждый раздел работы начинается с нового листа, нумерация листов проекта должна быть сквозной. Шрифт для основного текста Times New Roman Cyr, размер 14 пунктов.

3.3.Текстовая часть проекта выполняется по ГОСТ 2.105-95 "'Общие требования к текстовым документам" и может быть выполнена от руки, на пишущей машинке или распечатана на принтере.

3.4.Иллюстрации (см.п.2.4) размещаются на отдельных листах, обозначаются как рисунки (Рисунок №), имеют подрисуночное наименование, сквозную нумерацию в пределах проекта и следуют за текстом, в котором впервые дается ссылка на данную иллюстрацию.

3.5.Результаты расчетов сводятся в таблицы, размещаемые под текстом, в котором впервые дается на них ссылка, имеют название перед самой таблицей, отражающее ее содержание, и сквозную нумерацию в пределах курсовой работы.

3.6.Ссылки на использованные литературные источники и нормативную документацию должны выполняются в соответствии с ГОСТ 7.32-91.

3.7. Оглавление курсового проекта располагается после титульного листа, именуется как "Содержание" и состоит из номеров и названий разделов с указанием номеров страниц.

3.8.Список использованной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.32-91 и приводится на последней странице работы.

4. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНОЙ ЧАСТИ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Выполнение этой части курсового проекта предусматривает владение курсантом математическим аппаратом обработки равноточных и разновесных наблюдений и умение применять этот аппарат на практике. Все расчеты подобного рода выполнялись в цикле лабораторных работ по курсу МОС и не содержат ничего принципиально нового кроме построения меркаторской карты-схемы. Поэтому в качестве литературы проще всего воспользоваться хорошо известными вам методическими указаниями к выполнению лабораторных работ. При этом особое внимание следует обратить на работу №4, где описываются векториальные погрешности и операции над ними, которые включают построение эллипсов погрешностей. Ссылка на этот источник дана под номером [1]. Все многочисленные операции над векториальными погрешностями и эллипсами погрешностей подробно описаны в IV части лекционного курса [2] на стр. 60 - 97.

4.1 Исходные данные для выполнения курсового проекта

Индивидуальные исходные данные задачи заданы в форме, типичный вид которой представлен ниже.

Курсовой поект по МОС 28.03.2005 321-1
5 (фамилия)
Акватория – BarenzSee
Заданы ориентиры, а также дистанции и пеленги для них

1 LandMark FI = 69,543N LA = 33,067E
D1=20,57; 20,87; 21,16; 20,39 20,79
P1 = 202,7; 203,2; 202,9; 202,5; 203,7

2 LandMark FI = 70,090N LA = 32,360E
D2 = 17,44; 17,28; 16,94; 17,07
P2=254,8; 253,6; 253,3; 252,6

Возможно задание третьего ориентира, которое рассчитано на дальнейшее расширение тематики курсовой работы. Выполнение работы с тремя ориентирами является непременным условием отличной оценки.

3 LandMark FI=70,249 N LA=35,484 E
D3=41,98; 42,69; 42,80; 42,47; 42,2; 42,92
P3= 141,4; 141,9 ; 141,0; 141,8; 142,3; 141,5

Заданы плавание и истнный гирокомпасный курс судна
$S_{пл}$ = 42,2 м.м. ИГК = 144,2°
Заданы погрешности лага и гирокомпаса
$\sigma_{\Delta\Lambda}$= 1,1% $\sigma_{ГК}$= 0,8°

Задано направление и удаление линии навигационной опасности от финальной точки плавания:

Направление линии навигационной опасности NEE с ее удалением

$D_{оп}$ = 0.8 м.м. от конечной точки плавания

Задание:

Обработать наблюдения и найти их средние значения и СКП.

Построить карту-схему и графически определить место судна:

А - по двум пеленгам;

В - двум дистанциям.

Рассчитать и построить средние квадратические эллипсы погрешностей обсервованных мест судна для способов обсервации А и В.

Построить на карте и оформить заданный отрезок плавания.

Рассчитать эллипс погрешности от счисления пути судна.

Рассчитать и построить итоговый эллипс погрешностей в конечной точке плавания.

Построить круг накрытия истинного места судна с надежностью 95%.

Рассчитать вероятность безопасного положение конечной точки плавания относительно заданной линии навигационной опасности (направление и удаление).

4.2. Обработка полученных данных для первого ориентира.

Табл.№1 Обработка измеренных дистанций (D1):

$\mathbf{D_k}$	$\mathbf{\upsilon_k}$	$\mathbf{\upsilon_k^2}$
20,57	-0,19	0,03
20,87	0,11	0,02
21,16	0,40 *	0,17
20,39	-0,37	0,13
20,79	0,03	
Σ_1 = 103.78	Σ_2 = |0,02| < 0.005*5=0.025	Σ_3 = 0,346

$\overline{D}1 = \Sigma_1 / n = 20.756 = 20.76$ м.м.

$$\sigma_{D1} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.346}{4}} = 0.29 \text{ м.м.}$$

$$\sigma_{\overline{D}1} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n\cdot(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.346}{5\cdot 4}} = 0.13 \text{ м.м.}$$

Проверка наблюдений на промах:

$$\tau = \frac{\left| D_{max}^{min} - \overline{D} \right|}{\sigma_D}$$

$$\tau_{max} = \frac{0.40}{0.29} = 1.21$$

При n = 5 $\tau_{кр}^{5\%} = 1.87 > \tau_{max}$ Делаем вывод, что наблюдения не содержат промаха

Табл.№2 Обработка измеренных пеленгов (ИП1)

P_k	υ_k	υ_k^2
202,70	-0,30	0,09
203,20	0,20	0,04
202,90	-0,10	0,01
202,50	-0,50	0,25
203,70	0,70 *	0,49
Σ_1 = 1015,00	**Σ_2 = 0,00**	**Σ_3 = 0,88**

$\overline{P1} = \Sigma_1 / n = 203.0^0$

$$\sigma_{P1} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.88}{4}} = 0.47^0 \qquad \sigma_{\bar{P}1} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n\cdot(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.88}{5\cdot 4}} = 0.21^0$$

Проверка наблюдений на промах:

$$\tau = \frac{\left| P_{max}^{min} - \bar{P} \right|}{\sigma_P}$$

$$\tau_{max} = \frac{0.70}{0.47} = 1.49$$

При n = 5 $\tau_{кр}^{5\%} = 1.87 > \tau_{max}$ Делаем вывод, что наблюдения не содержат промаха

4.2. Обработка полученных данных для второго ориентира.

Табл.№3 Обработка измеренных дистанций(D2):

D_k	υ_k	υ_k^2
17,44	0,31 *	0,0961
17,28	0,15	0,0225
16,94	-0,19	0,0361
16,87	-0,26	0,0676
Σ_1 = 68.53	**Σ_2 = |0,01| < 0.005*4**	**Σ_3 = 0,2223**

	= 0.02	

$\overline{D2} = \Sigma_1 / n = 17.13$ м.м.

$$\sigma_{D2} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.22}{3}} = 0.27 \text{ м.м.} \qquad \sigma_{\overline{D}2} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{0.22}{4 \cdot 3}} = 0.14 \text{ м.м.}$$

Проверка наблюдений на промах:

$$\tau = \frac{\left| D_{max}^{min} - \overline{D} \right|}{\sigma_D}$$

$$\tau_{max} = \frac{0.31}{0.27} = 1.15$$

При n = 4 $\quad \tau_{кр}^{5\%} = 1.69 > \tau_{max}$ Делаем вывод, что наблюдения не содержат промаха

Табл.4 Обработка измеренных пеленгов (ИП2)

P_k	υ_k	υ_k^2
254,80	1,22 *	1,50
253,60	0,02	0,00
253,30	-0,28	0,08
252,60	-0,98	0,95
Σ₁ = 1014,30	**Σ₂ = 0,00**	**Σ₃ = 2,53**

$\overline{P}2 = \Sigma_1 / n = 253.6^0$

$$\sigma_{P2} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n-1}} = \sqrt{\frac{2.53}{3}} = 0.92^0 \qquad \sigma_{\overline{P2}} \approx \sqrt{\frac{\Sigma_3}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{2.53}{4 \cdot 3}} = 0.46^0$$

Проверка наблюдений на промах: $\tau = \dfrac{\left| P_{max}^{min} - \overline{P} \right|}{\sigma_P}$

$\tau_{max} = \dfrac{1.22}{0.92} = 1.30$

При n = 4 $\tau_{кр}^{5\%} = 1.69 > \tau$ Делаем вывод, что наблюдения не содержат промаха

4.4. Построение меркаторского планшета с выбором масштаба

Выберем для обсервации 1 и 2 ориентиры. Грубо, угол между пеленгами на них составляет примерно 52°. Вообще то, лучше было бы взять ориентиры 2 и 3, т.к. угол между пеленгами для них составляет примерно 69°, что ближе к прямому углу.

Определяем среднюю широту по координатам 1 и 2 ориентиров $\varphi_{ср} = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = (69.543+70.090)/2 = 70.017 = 70.03°$, $\cos(\varphi_{ср}) = 0.342$. Найдем разность широт и долгот, выбранных для обсервации ориентиров

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 15';\ \Delta\lambda = \varphi_1 - \varphi_2 = 31'.$$

Выбирая масштаб, учтем, что размеры листа формата А4 29 x 21 см.

Зададим, например, линейный масштаб по широте φ:

1' = 2 см, тогда разность широт в 15′ потребует 2*15 = 30 см. При этом масштаб по оси долгот λ, где откладывается отшествие, будет:

1' = 2 см * cos $\varphi_{ср}$ = 2 * 0.342 = = 0.684 мм. Это потребует на оси долгот 0.684 *31= 21 см. Обе разности разместились на осях впритык, ориентиры окажутся практически на обрезе карты-схемы, к тому же неизвестно, где окажется обсервованное место и как затем пройдет линия пути судна. Поэтому придется немного уменьшить выбранный масштаб, например:

по оси широт 1' = 1.5 см, по оси долгот 1' = 1.5*0.342 = 0.513 см.

Т.е. если необходимо увеличить(уменьшить) масштаб карты-схемы, то следует рассчитанные до этого значения линейных масштабов увеличить(уменьшить) в одно и то же число раз.

Иногда приходится задавать линейный масштаб по долготе и вычислять линейный масштаб по широте. Это связано с требованием к планшету уложиться в формат бумаги А4. Иногда придется расположить формат как альбомный, а не как книжный. Все это зависит от данных вашей конкретной задачи.

Строя планшет, придется также выбрать локальное начало координат, которое можно расположить в любой точке с “удобными” координатами. Главная цель выбора начала координат и масштаба карты-схемы – наилучшим образом представить картографическую информацию, предоставив ей максимально возможную площадь на формате А4. В нашем случае координаты левой нижней точки карты-схемы на рисунке 1 имеют с следующие координаты:

$\varphi = 69^0 52{,}0'$ $\lambda = 32^0 25{,}0'$.

Нанесем на планшет ориентиры 1, 2 и определим место судна графически по вычисленным ранее средним пеленгам и дистанциям:

А: по двум пеленгам, проведя линии средних пеленгов через ориентиры с помощью транспортира:

$\varphi = 70^0 14{,}6'$ $\lambda = 33^0$
25,5’

В: по двум дистанциям, сделав две засечки средних дистанций от ориентиров с помощью циркуля:

$\varphi = 70^0 14{,}8'$ $\lambda = 33^0$
26,3’

Эти построения представлены на рисунке 1 в схематическом виде, т.к. точные построения можно провести только на миллиметровой бумаге.

4.5. Определение векториальных погрешностей для каждого полученного места судна и объединение их в эллипсы

погрешностей:

Для ОМС по двум пеленгам:

$$\overleftrightarrow{\upsilon}_P = D \cdot \frac{\sigma_{\bar{p}}}{57.3}$$

$\overline{D1} = 20.76$ м.м. $\overline{D2} = 17.13$ м.м.

$\sigma_{P1} = 0.21^0$ $\sigma_{P2} = 0.46^0$

$\overleftrightarrow{\upsilon}_{P_1} = 0.08$ м.м. $\overleftrightarrow{\upsilon}_{P_2} = 0.14$ м.м.

$\Theta = 50.6^0$

$$\lambda = \frac{\overleftrightarrow{\upsilon}_{Pmax}}{\overleftrightarrow{\upsilon}_{Pmin}} = \frac{0.14}{0.08} = 1.75$$

По приложению №5 к МТ-75 находим, что:

$K_a = 2.405$ $K_b = 0.92$

$\varphi = 10^0$

Полуоси эллипса:

$a = K_a \cdot \overleftrightarrow{\upsilon}_{min} \cdot \sin\Theta = 0.149$ м.м.

$b = K_b \cdot \overleftrightarrow{\upsilon}_{min} \cdot \sin\Theta = 0.059$ м.м.

$M = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0.149^2 + 0.059^2} = 0.16$ м.м.

Для ОМС по двум дистанциям:

$\overleftrightarrow{\upsilon}_D = \sigma_{\bar{D}}$

$\overleftrightarrow{\upsilon}_{D_1} = 0.13$ м.м. $\overleftrightarrow{\upsilon}_{D_2} = 0.14$ м.м.

$\Theta = 49.5^0$

$$\lambda = \frac{\overleftrightarrow{\upsilon}_{Dmax}}{\overleftrightarrow{\upsilon}_{Dmin}} = \frac{0.14}{0.13} = 1.1$$

По Приложению №5 к МТ-75 находим, что:

$K_a = 1.765$ $K_b = 0.81$

$\varphi = 22.0^0$

Полуоси эллипса:

$a = K_a \cdot \overleftrightarrow{\upsilon}_{min} \cdot \sin\Theta = 0.176$ м.м.

$b = K_b \cdot \overleftrightarrow{\upsilon}_{min} \cdot \sin\Theta = 0.081$ м.м.

$M = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0.176^2 + 0.081^2} = 0.19$ м.м.

Хотя в данном случае СКП пеленгов больше, они дают меньшие векториальные погрешности и меньший по площади стандартный эллипс, т.е. место судна определенное по пеленгам в данном случае точнее места, определенного по дистанциям. Рассчитанные средние квадратические эллипсы изображены на рисунках 2 и 3 схематически. Их точное построение ведется на кальках размеров в четверть формата А4 с сохранением всех направлений карты. Обязательно показывается направление на норд истинный.

Здесь мы пользуемся для построения эллипса по двум векториальным погрешностям таблицей Приложения №5 к МТ-75. По умолчанию предполагается, что две линии положения или две векториальные погрешности не коррелированны. В МТ-2000 имеется таблица 4.11, которая дает возможность построения эллипса погрешностей и в случае коррелированности ЛП. Таблица состоит из комплекса подтаблиц, в каждой из которых коэффициент корреляции постоянен. Шаг его изменения равен 0.2. В случае некоррелированности ЛП выбираем подтаблицу, для которой k = 0. Эту подтаблицу мы приводим в электронном приложении к методическим указаниям.

4.6. Построение для каждого обсервованного места круга для вероятности накрытия истинного места, равной 95%.

СКП – эллипс способа А (обсервация по пеленгам):

$e = b / a = 0.059 / 0.149 = 0.40$

$M = 0.16$ м.м.

По таблице 1- в из МТ-75 находим $R = 1.9$

$M_{зад} = M \cdot R = 1.9 \cdot 0.16 = 0.30$ м.м.

Этим кругом не рекомендуется пользоваться из-за малого отношения полуосей эллипса ($e < 0.6$).

СКП – эллипс способа В (обсервация по дистанциям):

$e = b / a = 0.081 / 0.176 = 0.46$

$M = 0.19$ м. м.

По таблице 1-в из МТ-75 находим $R = 2.0$

$M_{зад} = M \cdot R = 2.0 \cdot 0.19 = 0.38$ м.м.

Этот круг также не желателен для практического использования из-за малого значения е.

Это значит, что в данном случае наиболее информативен для судоводителя сам эллипс погрешностей, а не соответствующий ему круг.

4.7. Расчет плавания судна:

Из обсервованного по двум пеленгам места судна (как более точного) проложим на планшете плавание судна в соответствии с заданием:

ИГК = $144,2^0$ $S_{пл} = 42.2$ м.м.

Снимаем с карты-схемы счислимые координаты судна в конечной точке плавания:

$\varphi_{сч} = 69.400 = 69°40.0'$ $\lambda_{сч} = 34.360 = 34^0 36,0'$

4.8. Построение эллипса погрешностей от счисления в конечной точке плавания

В связи с тем, что лаг и компас имеют свои случайные погрешности

$\sigma_{\Delta\Lambda}$= 1,1% $\sigma_{ГК}$= 0,8°,

в конце плавания возникают две векториальные погрешности:

вдоль линии пути

$v_s = S_{пл} \cdot \sigma_{\Delta\Lambda} = 42.3 \cdot 0.011 = 0.47$ м.м.,

поперек линии пути

$v_К = S_{пл} \cdot \sigma_К / 57.3 = 42.3 \cdot 0.8 / 57.3 = 0.59$ м.м.

Поскольку эти векториальные погрешности всегда перпендикулярны, то они становятся полуосями эллипса погрешности от счисления места:

b = 0.47 м.м., a = 0.59 м.м.;

при этом нет никакой необходимости пользоваться Приложением №5 к МТ-75.

4.9. Построение итогового эллипса погрешностей в конечной точке

Для определения итогового эллипса погрешностей сложим векториальные погрешности, полученные при определении места судна по пеленгам с векториальными погрешностями счисления. Для этого выстроим ряд этих погрешностей с указанием их направлений:

$v_{p1} = v_1 = 0.06$ м.м. $\psi_1 = 23.0°$

$v_{p2} = v_2 = 0.18$ м.м. $\psi_2 = 73.6°$

$v_К = v_3 = 0.59$ м.м. $\psi_3 = 234.2°$

$v_S = v_4 = 0.47$ м.м. $\psi_4 = 144.2°$

Введем систему координат так, чтобы ось X совпадала с направлением на $N_и$, а ось Y была перпендикулярна ей. Спроецируем векториальные погрешности на эти оси и найдем суммарные векториальные погрешности. Так как изначально векториальные погрешности некоррелированы, то сложить их можно, используя простое квадратическое сложение:

$$\overleftrightarrow{\upsilon}_x = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \upsilon_k^2 \cdot \cos^2 \psi_k} = \sqrt{0,307} = 0.55 \text{ м.м.}$$

$$\overleftrightarrow{\upsilon}_y = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \upsilon_k^2 \cdot \sin^2 \psi_k} = \sqrt{0,288} = 0.54 \text{ м.м.}$$

Поскольку мы проектировали на оси одни и те же векториальные погрешности, то между суммарными проекциями возникает зависимость, которую оценим коэффициентом корреляции.

Определим корреляционный момент этих проекций:

$$M_{\overleftrightarrow{\upsilon}_x \overleftrightarrow{\upsilon}_y} = \sum_{k=1}^{n} \upsilon_{kx} \cdot \upsilon_{ky} = \sum_{k=1}^{n} \upsilon_k^2 \cdot \cos \psi_k \cdot \sin \psi_k = \mathbf{0,057}$$

Представим эти вычисления в развернутой форме в виде табл.5

Табл.5 Расчет параметров финального эллипса погрешностей

v_k	ψ_k	X	Y	X* X	Y* Y	X* Y
0.08	**23.0**	0,031	0,074	0,001	0,005	0,002
0.14	**163.6**	0,040	-0,134	0,002	0,018	-0,005
0.59	**234.2**	-0,478	-0,345	0,229	0,119	0,165
0.47	**144.2**	0,275	-0,381	0,076	0,145	-0,105
Σ				0,307	0,288	0,057

Направление большой полуоси СКП – эллипса:

$$\varphi = \operatorname{arctg} [2M_{xy}/(v_x^2 - v_y^2)] \pm 90° =$$

$$\operatorname{arctg} [0.114/0.019] \pm 90° = 80.5° \pm 90° = (350.5° – 170.5°)$$

Итак, ориентация большой оси итогового эллипса

$$\varphi = (350.5° – 170.5°)$$

Полуоси эллипса находятся из системы уравнений:

$$a^2 + b^2 = \sum_{k=1}^{n} \overleftrightarrow{\upsilon}_k^2 = 0,307 + 0,288 = 0.595$$

$$a^2 – b^2 = \sqrt{\left(\overleftrightarrow{\upsilon}_x^2 - \overleftrightarrow{\upsilon}_y^2\right)^2 + \left(2 \cdot M_{\overleftrightarrow{\upsilon}_x \overleftrightarrow{\upsilon}_y}\right)^2} = \sqrt{[(0.019)^2 + (0.114)^2]} = 0.116,$$

откуда простым вычислением находим:

a = 0.596 м.м.

b = 0.489 м.м.

Зная величины полуосей эллипса и направление его большой оси, легко построить сам эллипс погрешностей. В нашем случае (рисунок 5) он очень близок к кругу; в нем большую составляющую имеет погрешность счисления, а не погрешность обсервации исходной точки плавания. Практически это означает, что в реальном плавании следует сделать новую обсервацию для уточнения своего места.

4.10. «Размазывание» конечного стандартного эллипса в круг с вероятностью 95%-го накрытия им истинного места судна.

Вычисляем эксцентриситет эллипса

e = b / a = 0.486 / 0.596 = 0.82

По таблице 1-в из МТ-75 по величине e и надежности 95% находим R = 1.8

M = $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0.596^2 + 0.489^2} = 0.77$ м.м.

$M_{зад}$ = M · R = 1.8 · 0.77 = 1.39 м.м.

Изображаем этот круг на карте-схеме с центром в конечной точке плавания.

Обратим ваше особое внимание на две приближенные формулы для оценки точности места судна, о которых часто спрашивают эксперты на Государственных квалификационных экзаменах, и которые вы в точном варианте мы использовали выше.

1. Радиальная погрешность места судна для надежности накрытия 95 % при определении места по двум пеленгам:

$$M_{зад} = \sqrt{(D1)^2 + (D2)^2}\,\frac{2\sigma p}{57.3},$$

где D1, D2 – дистанции до ориентиров, σ_p – погрешность наблюдения пеленгов в градусах.

2. Радиальная погрешность места судна для надежности накрытия 95 % при определении места по двум дистанциям:

$M_{зад} = 2\sqrt{2} * \sigma_D$,

где σ_D – погрешность наблюдения дистанций до ориентиров.

Полезно здесь вспомнить и самую общую формулу для расчета СКП места по двум линиям положения, по которым получаем место судна:

$$M_o = \frac{1}{\sin(\Delta\tau)}\sqrt{(m_1/g_1)^2 + (m_2/g_2)^2 - 2k_{12}(m_1/g_1)(m_2/g_2)\cos(\Delta\tau)}$$

В этой важной формуле$\Delta\tau$ - угол между градиентами линий положения (или азимутами переносов), m_1 и m_2 – оценки СКП линий положения (т.е. в направлениях их градиентов), g_1и g_2 - модули градиентов ЛП, k_{12} – коэффициент корреляции между навигационными параметрами (и переносами ЛП).

В МТ-2000 имеется таблица 4.11, которая позволяет строить стандартный эллипс погрешностей по величинам СКП двух линий положения и угла между их градиентами. Структура этой таблицы подобна структуре таблицы Приложения №5 МТ-75. Однако есть некоторые различия не принципиального характера. Входные переменные располагаются иначе. Параметр (переменная) $\lambda = m_{min}/m_{max} <= 1$ расположена по верхнему (горизонтальному) обрезу таблицы в диапазоне 0.1 ÷ 1.0 и представляет собой от отношение СКП более точной (оно меньше) к СКП более точной ЛП. Параметр $\Delta\tau$ есть угол между градиентами линий положения, он расположен по левому вертикальному обрезу таблицы в диапазоне 20° ÷ 160°. Такой диапазон угла связан с тем, что градиенты как вектора имеют вполне определенное направление, которое мы не имеем право менять на противоположное. Последнее отличие – набор результатов приискания в этой таблице. Их теперь четыре – два коэффициента полуосей k_a, k_b, коэффициент СКП места судна k_m и угол ориентации эллипса φ. Определив их при необходимости с интерполяцией, находим:

- полуоси эллипса погрешностей $a = k_a * m_{min}$, $b= k_b * m_{min}$;
- СКП места судна $m = k_m * m_{min}$.

Угол φ определяет направление большой оси эллипса по отношению к более точной линии положения. При этом модуль положительного угла φ откладывается внутри угла Δτ. Модуль отрицательного угла φ откладывается внутрь угла, равного 180°-Δτ.

4.11. Оценка безопасности положения судна относительно заданной навигационной опасности

Наконец, оценим вероятность (надежность) безопасного положения конечного места судна относительно заданной навигационной опасности. В данном случае задано направление на опасность NEE (т.е. 22.5° x 3 =67.5°) и удаление от конечной точки плавания $D_{оп}$ = 3 м.м.

Для этого спроецируем полуоси итогового эллипса погрешностей на направление на опасность, чтобы найти СКП места v_{NEE} в этом направлении. Эти проекции сложим квадратически, считая, что они некоррелированы. Тогда получим

$$(v_{NEE})^2 = [a*\cos(10°+67.5°)]^2+[b*\sin(10°+67.5°)]^2 =$$

$$= [0.596*\cos(77.5°)]^2+[0.489*\sin(77.5°)]^2 = 0.017 + 0.228 = 0.245$$

В итоге, $v_{NEE} = \sqrt{(0.245)} = 0.495$ м.м. Рассчитываем вероятность безопасности места относительно линии опасности как вероятность одностороннего положения возможного места до этой линии:

$P= 0.5 + \Phi(D_{оп}/v_{NEE}) = 0.5 + = 0.5 + \Phi(1.62) = 0.5 + 0.447 = 0.947 =$ 94.7%.

Значение интегральной функции Лапласа приискано в таблице 1б МТ-75 (или в МТ-2000). В данном случае положение судна можно считать безопасным, следуя установкам ИМО.

5. Заключение

В заключении следует зафиксировать следующие результаты Ваших расчетов и построений:

- указать, какое из обсервованных мест является точнее для вашего случая, и погрешность какого из наблюдений повлияло на точность места в большей степени;

- указать, что существеннее повлияло на точность конечной точки плавания – погрешность исходной обсервованной точки или погрешность счисления;
- указать, обеспечена ли безопасность полученного счислимо-обсервованного места судна относительно заданной опасности.

6. Список рекомендуемой литературы

1. Пашенцев С.В. Методические указания к практическим занятиям по курсу МОС /С.В. Пашенцев, Мурманск, 2002, изд-во МГТУ, - 36 с.
2. Вульфович Б.А. Системы случайных величин на плоскости и их распределения, в 4-х ч., ч.IV /Б.А. Вульфович, С.В. Пашенцев - Мурманск, МГАРФ, 1986. - 126 с.
3. Пашенцев С.В., Юдин Ю.И. Оценка точности в задачах судовождения - Мурманск, МГТУ, 2010. - 152 с.
4. Кондрашихин В.Т. Теория ошибок, М.: Транспорт, 1969. – 256 с.

Конспект лекций краткий
по дисциплине
«Математические основы судовождения»

Лекция 1
ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ: ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ И СВОЙСТВА
Лекция 2
НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ
Лекция 3
СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ
Лекция 4
ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ

Лекция 1. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ: ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ И СВОЙСТВА

Решение любой навигационной задачи состоит, как правило, из двух основных этапов. Первый этап состоит в измерении (наблюдении) каких-либо навигационных параметров: направлений, углов, расстояний, моментов времени, скоростей, глубин и т.д.

Второй этап представляет собой обработку этих измерений, т.е. всевозможные вычисления.

Измерения (в зависимости от целей конечного результата) делятся на прямые и косвенные. Измерения называются п р я м ы м и, если их результат является конечной целью работы. Если же они служат для последующего вывода других искомых величин, то они называются косвенными. Например, если для получения величины скорости ветра сделано несколько замеров анемометром, то эти измерения прямые. Обработка их практически сводится к вычислению вероятнейшего значения скорости ветра и оценке его точности.

Другой пример - измерение серии высот светила. Если конечной целью является определение истинного места судна (обсервация), то измерения считаются косвенными. Их обработка кроме обязательного получения вероятнейшего значения высоты включает расчёт так называемой линии положения, функционально связанной с измеренной высотой.
Какой бы характер измерения ни носили - прямой или косвенный, и в каких бы условиях ни производились, они неизбежно сопровождаются погрешностями. При косвенных измерениях на эти погрешности накладываются и сложным образом взаимодействуют погрешности обработки, которые включают как погрешности расчётного характера, так и погрешности функциональных связей между измеряемыми и итоговыми величинами.
Данное пособие посвящено анализу погрешностей измерений; погрешности функциональных связей будут рассмотрены в разделе 12.
Невозможность безошибочных измерений является непреложным фактом, который имеет глубокий философский смысл, основан на положениях материалистической диалектики и подтверждён многовековой человеческой практикой. Остановимся на этом подробнее.
Измерить какую-либо величину U - это значит сравнить ее с реальной единицей меры u, обладающей предельной мерой точности hu , другими словами, осуществить процесс уравнивания по схеме $U = N u$. Для точного определения U необходимо идеально измерить отвлечённое число N с помощью идеального носителя единицы меры u - инструмента. Но возможно ли это практически?
Во-первых, сам объект измерений или его составляющие часто не бывают идеально определены. Например, при измерении высоты звезды над горизонтом линия горизонта очерчивается нечётко; кроме того, вследствие вращения Земли непрерывное видимое движение совершает и звезда, полагаемая неподвижной.
Во-вторых, погрешности даёт и субъект измерений - человек. Его личные качества, характер и привычки влияют на измерения. Например, один человек всегда чуть-чуть запаздывает нажимать кнопку секундомера, другой несколько опережает нужное мгновение. В высокоточных астрономо-геодезических измерениях указанные погрешности, носящие рефлекторный характер, учитываются специальной поправкой.
В-третьих, любое измерение выполняется с помощью какого-либо инструмента, все части которого характеризуются определёнными техническими допусками, а сам он в целом предельной разрешающей способностью. Например, линейкой, разбитой на сантиметры, невозможно измерить длину с точностью до 0,1 мм.
В-четвёртых, все измерения выполняются в конкретных внешних условиях, непрерывно меняющихся по многим характеристикам. Например, при измерении высоты светила над горизонтом ими будут: температура воздуха и воды, влажность, давление, скорость и направление ветра и течения, элементы качки, скорость судна, высота глаза и ее колебания на качке, дрожание рук, изменение хода хронометра и

секундомера и т.д.
Таким образом, любые измерения предполагают взаимодействие по крайней мере четырёх факторов, влияющих на точность измерений: I) объекта измерений, не зависящего от субъекта и других факторов; 2) субъекта измерений (человека, выполняющего измерения); 3) инструмента, физически несущего в себе меру измерения; 4) комплекса внешних условий измерений.
Указанные факторы позволяют теоретически подразделить все погрешности измерений по характеру источника на следующие типы:
1. Погрешности объекта измерений» в том числе теоретические.
2. Погрешности субъекта измерений ("личные").
3. Погрешности инструментальные (приборные).
4. Погрешности, связанные с условиями измерений.
Эта классификация весьма условна, так как указанные факторы действуют совместно и, кроме того, определены не совсем однозначно. Например, нечёткость линии горизонта одновременно является и погрешностью объекта измерения высоты и погрешностью от условий этого измерения.
Кроме классификации погрешностей по характеру источника важное значение имеют и другие способы классификации, существующие наряду с приведённой. Другой является классификация по способу проявления, согласно которой погрешности делятся на:
I) систематическое; 2) случайные; 3) промахи.
Систематические погрешности
Погрешности измерений, происхождение которых однозначно зависит от определённого источника и которые функционально связаны с воздействием этого источника (даже если сама функция неизвестна), называются систематическими погрешностями. Это определение систематических погрешностей следует признать весьма конструктивным, так как оно: I) нацеливает на изучение реальных источников погрешностей и установление функциональных связей между источниками и погрешностями; 2) приводит к поиску способов борьбы с систематическими погрешностями (например, введение соответствующих поправок и применение оптимальной методики измерений); 3) показывает принципиальную возможность ослабить влияние погрешностей на конечный результат и в идеальном случае свести их влияние к нулю
В свою очередь, систематические погрешности удобно классифицировать по характеру воздействия на результат измерения. Согласно этой классификации они подразделяются на следующие виды:
1. Постоянные, которые изменяют результат на одинаковую величину независимо от значения самой измеряемой величины. Например, если нуль отсчёта сбит на -1,5?, то любой угол, измеренный таким секстаном, будет содержать постоянную систематическую погрешность +1,5?.
2. Односторонне действующие погрешности, которые имеют для определённого источника погрешностей один и тот же знак (плюс или минус) и не закономерно изменяют измеряемую величину, накапливаясь в ней с одним и тем же знаком. Например, измерение расстояний на

местности с помощью мерной ленты всегда даёт завышенный результат, т.е. приводит к незакономерной положительной погрешности, зависящей от рельефа местности и накапливающейся по мере откладывания ленты.
3. Закономерные погрешности, изменяющие результат измерений в определённом отношении к самому результату. Это отношение выражается функцией (законом), связывающей влияние источника погрешности, измеряемую величину и саму погрешность.
Закономерные погрешности, наиболее часто встречающиеся в судовождении, условно делят на линейные, параболические, периодические и сложные (в частности, экспоненциальные).
Примером линейной погрешности служит погрешность в принятом значении поправки лага, искажающая пройденное судном расстояние пропорционально самому расстоянию.
Примером параболической погрешности является погрешность пройденного судном расстояния, пропорциональная квадрату скорости течения.
Периодические погрешности носят в основном инструментальный характер и сопровождают отсчёты по кругам и барабанам в угломерных приборах (секстаны, теодолиты, наклономеры и др.). Они имеют место и при измерениях девиации (отклонения) магнитного компаса.
Исключение или ослабление действия систематической погрешности возможно лишь тогда, когда установлен её источник и характер воздействия на результат. Эффект достигается, как правило, следующими мероприятиями:
1. Введением в результаты соответствующих поправок.
2. Рациональной методикой и организацией измерений.
Первый тип мероприятий характерен для борьбы с погрешностями инструментального и теоретического характера; второй используется при любом виде погрешностей.
Например, измеряя секстаном высоту светила над горизонтом, следует ввести поправку за наклонение видимого горизонта, учитывающую теоретическую погрешность за высоту глаза наблюдателя. Кроме того, измеренную высоту следует исправить поправкой секстана, взятой из аттестата прибора.
Примером рациональной организации измерений может служить следующий пример. Если направления измеряются с постоянной систематической погрешностью (допустим, за счёт сбитого нуля), то угол, определяемый как разность направлений, от указанной погрешности будет свободен.
Изучение систематических погрешностей является исследовательской задачей каждой судоводительской науки - навигации, астрономии, ЭНП, РНП и др. Так как источников систематических погрешностей множество, и действуют они совместно, то следует добиваться того, чтобы все факторы, кроме изучаемого, оставались неизменными в процессе исследования.
Случайные погрешности
На систематические погрешности измерений накладываются так называемые случайные погрешности, устранить которые нельзя ни

поправками, ни рациональной методикой измерений. Что же представляют собой эти погрешности?
Основные положения диалектики гласят, что все в природе закономерно. Однако закономерности природы носят не только функциональный характер, но и статистический, когда причинно-следственные связи (например, между источниками погрешностей и самими погрешностями) принимают устойчивый характер не в единичном испытании (измерении), а в массе, т.е. когда число отдельных измерений достаточно велико.
Как уже говорилось выше, систематические погрешности носят характер именно функциональной связи между конкретным источником погрешностей и порождёнными им погрешностями и поэтому они проявляются даже в единичном измерении
Случайные погрешности так же, как и систематические, обладают закономерностью, но статической: порождённые многочисленными, порой непредвиденными причинами, они устойчиво проявляются в массовых однотипных измерениях. Таким образом, случайным погрешностям можно дать такое определение: случайными называются такие погрешности измерений, которые вызваны многообразными и противоречивыми причинами. Характер их взаимодействия не изучен; они существенно не связаны с производством данных измерений и зависят не функционально, а статистически от комплекса причин, их породивших.
Например, при измерении серии высот звезды введены поправки: инструментальная, за наклонение видимого горизонта, скорость судна, видимое движение звезды, "личная" и т.д., тем самым учтены все известные и предвидимые погрешности систематического характера. Тем не менее, отдельные высоты серии будут отличаться друг от друга, и устранить эти различия не удастся никогда. Это вызвано тем, неучтённых обстоятельств и причин оказывается так много (порывы ветра, волнение, водяные брызги, дрожание руки, ослабление внимания и т.д.), и они так "переплетены", что измеренные высоты будут содержать неустранимые погрешности, случайный характер которых очевиден.
Если систематические погрешности с их функциональным характером изучаются в судоводительских дисциплинах, то случайные погрешности с их статистическим характером изучаются в математике в теории погрешностей.
Теория погрешностей есть раздел теорий вероятностей, изучающий статистические (массовые) закономерности именно случайных погрешностей. Эта теория доказывает, что случайным погрешностям всех массовых измерений, если они освобождены от систематических влияний, присущи следующие характерные свойства:
1. Малые по модулю погрешности встречаются чаще, чем большие.
2. Отрицательные по знаку погрешности встречаются так же часто, как и положительные. Сумма погрешностей достаточно большой серии измерений есть величина, стремящаяся к нулю (свойство компенсации случайных погрешностей) .
3. Случайные погрешности по модулю не могут превзойти некоторую

границу ?, надёжно связанную с мерой точности h производимых измерений.

4. Внутри указанных границ (—?- ; +?) случайные погрешности могут принимать любые численные значения, а потому при числе измерений n? ? эти погрешности могут считаться непрерывной величиной в интервале (—?- ; +?).

Возвращаясь к различию между систематическими и случайными погрешностями, можно с некоторыми оговорками утверждать, что погрешности измерений, независимо от их происхождения, носят случайный характер, если удовлетворяют перечисленными свойствам, и систематический, если они этим свойствам не удовлетворяют. Справедливо и такое утверждение: если a - истинное (теоретическое) значение измеряемой величины, an отдельные измерения и n? ? , то наличие лишь случайных погрешностей приведёт к колебаниям значений an, вокруг центра a так, что

lim ?(an – a) = 0

Наличие же систематической погрешности ? сместит этот центр в точку a + ? так, что 1/n lim ?(an – a) = ?. Практически все, измерения содержат как систематические, так и случайные погрешности. При правильной организации измерений и учёте всех необходимых поправок случайная составляющая полной погрешности будет преобладать, а потому погрешности измерений будут отвечать изложенным выше пяти свойствам. В других случаях влияние систематических погрешностей будет преобладающим, и тогда эти свойства, главным образом компенсационное, выполняться не будут. Это является сигналом к изменению методики измерений и введению соответствующей поправки.

Промахи

Промахи занимают особое место в классификации погрешностей. Образно их можно назвать "случайными среди случайных погрешностей". "Случайны" они потому, что совершенно непредсказуемы и никак не связаны с сущностью самих измерений и мерой их точности h. Однако промахи - это не случайные погрешности, так как они не удовлетворяют пяти свойствам, определяющим случайные погрешности.

Промах можно определить как ошибку, содержащуюся в отдельных неверных измерениях. Промах - это грубая ошибка, по крайней мере, на порядок превосходящая меру точности данных измерений. Например, если с помощью секстана, имеющего точность отсчётного барабана в 0,1' , измерена серия углов: 20°48,3 ; 20°47,9'; 20°42,5'; 20°48,7'; 20°47,8'; 20°15,4', то последний угол содержит явный промах, и его значение следует просто отбросить.

Проводя конечное число наблюдений при непременном действии погрешностей, мы должны в результате их обработки получить оценку наблюдаемого параметра. Оценкой называется найденное при обработке приближённое значение параметра , которое затем используется как его неизвестное истинное значение a. Для уверенной замены истинного значения его оценкой она должна обладать свойствами состоятельности,

несмещённости и эффективности.
Состоятельностью оценки называется её свойство сходиться по вероятности к истинному значению измеряемого параметра при неограниченном числе наблюдений. Это возможно, если дисперсия оценки при этом стремится к нулю:

Несмещенность оценки состоит в том, что её математическое ожидание равно истинному значению параметра:

M() = a

Эффективность оценки требует, чтобы её дисперсия среди всех возможных оценок была минимальной

Получение при обработке оценок, обладающих всеми этими свойствами не всегда является легко разрешимой проблемой. Это мы рассмотрим в следующих лекциях.

Лекция 2.

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Статистические свойства наблюдений

Выясним главный вопрос: какому закону распределения следуют случайные погрешности наблюдений, и укажем способ определения параметров этого распределения. В дальнейшем при всех вычислениях будем иметь в виду независимые, прямые и равноточные наблюдения или измерения.
Наблюдения считаются независимыми, если результаты одного из них не сказываются на результатах другого.
Наблюдения являются прямыми, если величина наблюдаемого параметра непосредственно сравнивается с единицей измерения, например с нанесённой на шкале прибора.
Наблюдения можно считать равноточными или равновесными, если выполняется целый комплекс требований эквивалентности условий наблюдений в широком смысле слова: неизменность наблюдаемой величины, одинаковые измерительные инструменты и приборы, одинаковый метод наблюдения, одинаковое состояние внешней среды, один и тот же наблюдатель и т.д.
Пусть производится n независимых прямых равноточных наблюдений некоторой величины, истинное значение которой a, как правило, неизвестно. В процессе наблюдений получаем n случайных значений xk наблюдаемой величины, т.е. допускаем погрешности

?k=xk – a k=1, 2,…, n

которые будем считать чисто случайными, т.е. не обременёнными систематической погрешностью.
Каким образом распределены эти случайные погрешности? Человечество накопило многовековой опыт наблюдений, на основании которого уверенно формулируется ряд свойств таких погрешностей. Основные из них приведены в лекции I, повторим их ещё раз:
1) результаты наблюдений группируются вокруг одного значения,

обладающего свойством устойчивости: при увеличении числа наблюдений оно меняется незначительно. Этому значению соответствует погрешность, равная нулю;
2) большие по модулю погрешности встречаются реже, чем погрешности, меньшие по модулю;
3) погрешности, равные по модулю, но имеющие противоположные знаки, встречаются одинаково часто;
4) всегда существует некоторый интервал (-?пр; +?пр), за пределами которого погрешности практически не встречаются.
Четыре рассмотренные правила являются эмпирической, т.е. частотной формулировкой закона распределения случайных погрешностей.
Основываясь на том, что эти правила получены на базе огромного числа разнообразных наблюдений, когда частоты событий приближаются к их вероятностям, в этих правилах частотные формулировки типа "встречаются чаще", "встречаются одинаково часто" и т.п., можно заменить на вероятностные формулировки "вероятность больше", "вероятности одинаковы". В такой форме закон распределения случайных погрешностей хорошо описывается с помощью нормального распределения.
Если записать плотность вероятности такого распределения для случайной погрешности ?, имеющей нулевое математическое ожидание M(?) = 0 и среднеквадратическую погрешность (стандарт) ?, то эта плотность f(?) будет иметь вид:
(2.1)
Это и есть нормальный закон распределения случайной погрешности.
Сделаем оговорку, важную для понимания дальнейшего. Закон (2.1) записан для непрерывно распределённой случайной погрешности, в конкретных же наблюдениях имеем дело с дискретным набором самих результатов наблюдений и, следовательно, погрешностей. Это противоречие только кажущееся, поскольку при формулировке закона подразумевается принципиальная возможность произвести любое, даже бесконечное число наблюдений.
Так как речь идет о погрешности как о непрерывной случайной величине, то нельзя говорить о вероятности того, что погрешность примет какое-либо определённое значение. Следует говорить только о попадании случайной погрешности в некоторый интервал, пусть даже и бесконечно малый. В частности, по смыслу функции плотности вероятности случайной погрешности (1) можно записать вероятность ее попадания в интервал (?; ? + d?):
(2.2)
Обычным образом её можно интерпретировать как площадь криволинейной трапеции с этим интервалом в качестве основания, и ограниченной сверху кривой функции плотности f(?).
Эмпирические правила можно истолковать геометрически с помощью рис. 2.1, на котором изображены кривые Гаусса нормально распределённой случайной погрешности.
Так, на рис. 2.1,а показана большая часть S0 площади под кривой f(?) в

окрестности ? = 0, что указывает на большую вероятность группировки случайных погрешностей вокруг нулевого значения ? (правило 1).
На рис. 2.1,6 показаны две элементарные площади dS1 и dS2 криволинейных трапеций с одинаковым основанием d , но расположенных в окрестности различных по величине погрешностей ?1 < ?2; при этом dS1 > dS2. Это указывает на большую вероятность меньших по модулю погрешностей (правило 2) .
На рис. 2.1,в показаны две элементарные площади криволинейных трапеций dS1 и dS2, расположенных в окрестности равных по модулю погрешностей. В силу симметрии кривой Гаусса эти площади равны, что указывает на равенство вероятностей равных по модулю случайных погрешностей (правило 3).
Наконец, на рис. 2.1,г площадь под   "хвостами"   графика   плотности f(?) может стать сколь угодно малой, если выбрать   достаточно большим.

Рис. 2.1 а, б, в, г (свойства наблюдений описаны выше).

Это указывает на практически нулевую вероятность того, что случайные погрешности выйдут за пределы некоторого интервала (правило 4).
Например, найдём вероятность того, что случайная погрешность ? по модулю не будет превышать значения стандартной погрешности ?:
P(|?| > ?) = 1 – P(|?| < ?) = 1 – 2Ф0(?/?) = 1 – 0.68926 = 0.3174
что случайная погрешность по модулю будет превышать 3?:
P(|?| > 3?) = 1 – P(|?| < 3?) = 1 – 2Ф0(3?/?) = 1 – 0.9973 = 0.0027
Практически это означает, что в каждой серии из 1000 наблюдений в среднем 683 наблюдения будут иметь погрешность, меньшую ?, и в среднем лишь три результата выйдут за пределы трех-стандартного интервала. Значения интегральной функции Лапласа Ф0(1) и Ф0(3) и взяты из табл. МТ-2000.
Таким образом, практические выводы из закона нормального распределения случайных погрешностей (2.1) не расходятся с накопленным человечеством эмпирическим опытом.
В теории для принятия закона необходимо иметь более весомые основания, чем эмпирические факты. Таким основанием можно считать следствие из центральной предельной теоремы А.М. Ляпунова, которое гласит:
"Случайная величина, являющаяся суммой большого числа малых взаимно независимых случайных величин с произвольными законами распределения, имеет распределение тем ближе к закону нормальному, чем больше в сумме слагаемых”.
Именно такая ситуация возникает при любом наблюдении. На результат наблюдения неизбежно действует огромное (строго говоря, бесконечное) число независимых факторов, вклад каждого из которых порождает ничтожную погрешность. Но их совместное действие приводит к "суммарной" погрешности, которая распределена нормально, так как число факторов велико.
Итак, мы получили достаточные основания и теоретического, и

эмпирического характера для того, чтобы принять в качестве распределения наблюдаемого параметра нормальный закон

(2.3)

где a - истинное значение наблюдаемого параметра; ? истинное значение стандартной погрешности наблюдений. При этом распределение истинных погрешностей ? = x – a следует закону (2.1).

Однако, такого утверждения недостаточно для использования нормального закона, поскольку он содержит два параметра a и s, которые пока неизвестны. Более того, их вообще невозможно найти точно, так как для этого потребовалось бы сделать бесконечное число наблюдений.

Поэтому задача ставится следующим образом: как на основе конечного одела наблюдений получить некоторые приближения значений a и s, другими словами, как получить оценки истинного значения наблюдаемого параметра и стандартной погрешности в его определении? Именно эти две проблемы и являются основными в практических приложениях. В этом мы убедимся в последующих лекциях.

Лекция 3.

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Имеется ряд наблюдений некоторой величины с истинным значением a, которое нам неизвестно:

x1, x2, …, xk, …, xn

Примем среднее арифметическое наблюдений

(3.1)

за некоторую оценку истинного значения a, т.е. будем считать,

В этом случае нас будут интересовать, с одной стороны, основания для такого предположения, с другой стороны, качество этой оценки, т.е. погрешность приближения .

Можно привести два теоретических основания для принятия формулы (3.1): теорема больших чисел Чебышева и нахождение вероятнейшего значения наблюдаемой величины.

I. Следствие теоремы больших чисел Чебышева гласит. Пусть случайная величина x с математическим ожиданием M(x) = a и дисперсией ?2 принимает n значений в независимых прямых и равноточных наблюдениях. Тогда вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих значений от величины a не превысит по модулю некоторого значения ?, выражается неравенством

P(|x - a| < ?) > 1 - ?2/n2?2 (3.2)

Такое неравенство означает следующее. Если выбрать некоторое малое ?, т.е. потребовать высокой точности приближения (|x - a|<?) , то при достаточно большом числе наблюдений n можно добиться того, чтобы вероятность (3.2) оказалась столь угодно близкой к единице. Правда, такой вывод носит только принципиальный характер и не должен приводить к абсурдным заключениям. Нельзя рассчитывать на повышение точности

среднеарифметического результата только неограниченным увеличением числа измерений n. Существенную роль играет не количество наблюдений n , а стандарт ?, который служит исходной мерой точности данных измерений.

Пример 3.1. Произведено десять наблюдений при стандартной погрешности ? ~ 0,02, Какова вероятность, что среднее арифметическое наблюдений будет отличаться от истинного значения не более чем на 0,01?

Согласно неравенству (3) вероятность

P(|x-a| < 0.01) > 1 – 0.022/1020.012 = 0.996

т.е. исключительно велика. Событие оказалось почти достоверным, несмотря на требование высокого качества оценки, так как стандартная погрешность наблюдений была мала.

Пример 3.2. Сколько необходимо произвести наблюдений со стандартом ? = 0,01, чтобы их среднее арифметическое отличалось от истинного значения не более чем на 0,005 с вероятностью не ниже 0,999?

На основе неравенства Чебышева можно записать

P(|x-a| < 0.005) > 1 – 0.012/n20.0052 > 0.999

Решение этого неравенства даёт

n2 > 4/0.001 или n > 63.

Результат понятен, если учесть жёсткость поставленного требования.

2. Понятие среднего арифметического, как вероятнейшего значения наблюдаемой величины, возникает следующим образом.

Пусть независимые прямые и равноточные наблюдения параметра X дали результаты

x1, x2,…, xk, …, xn

Допустим, что выбрано некоторое значение x0, определённое с помощью результатов наблюдений, и введём отклонения индивидуальных наблюдений xk от величины x0:

vk = xk – x0, k=1, 2,…,n.

Если проводить подобные серии наблюдений многократно, то отклонения с одинаковыми номерами будут иметь разные значения, следовательно, можно говорить о случайных отклонениях, составляющих некоторую систему:

V1; V2; ... Vk... ;Vn.

Будем считать, что каждое Vk распределено нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Dк, которая в силу равноточности наблюдений одинакова для всех Vk и равна ?2. Тогда вероятность Pk попадания отклонения Vk в бесконечно малый интервал (vk; vk + dvk) равна:

Поскольку наблюдения независимы, то вероятность совместного появления отклонений в своих интервалах равна произведению соответствующих вероятностей:

Из формулы (4) хорошо видно, что вероятность всегда достигает некоторого максимального значения, которое обеспечивается минимальным значением суммы квадратов отклонений

Раскрыв эту сумму через результаты наблюдений

,
можно найти значение x0 , обеспечивающее минимум указанной суммы. Для этого действуем обычным методом дифференциального исчисления, приравняв производную суммы S по x0 к нулю:

Последнее соотношение определяет выражение для x0

т.е. x0   оказывается средним арифметическим . Поскольку это значение обеспечило наибольшую вероятность совместного попадания отклонений в систему указанных интервалов, величину можно назвать наивероятнейшим или просто вероятнейшим значением наблюдаемого параметра a. При этом отклонения наблюдений от среднего арифметического называют вероятнейшими отклонениями или вероятнейшими погрешностями. Сумма квадратов вероятнейших отклонений минимальна, а сумма самих вероятнейших отклонений всегда равна нулю:

Справедливость этого равенства легко проверяется:

Свойство отклонений (5) удобно использовать для контроля вычислений при обработке результатов наблюдений. Следует только учесть, что точное выполнение равенства возможно лишь при абсолютно точном вычислении среднего арифметического (без округления). Если же производится округление, то равенство (3.4) выполняется приближённо. Предельная абсолютная погрешность равна при 0.5 епз вычисленного значения   .
К сожалению, вероятнейшие отклонения не могут оценить истинных погрешностей сверху. Действительно,

Возведя обе части равенства в квадрат и складывая по всем n наблюдениям, находим:

Поскольку , то получаем:

Так как выражение положительно, то из равенства (6) следует:

т.е. сумма квадратов вероятнейших погрешностей всегда меньше суммы квадратов истинных погрешностей.   Это обстоятельство не позволяет применять для оценки точности приближения , хотя использование её для этой цели кажется интуитивно возможным. Перейдём к получению такой оценки в следующем разделе. Здесь же покажем, что является несмещенной оценкой истинного значения a , если в наблюдениях отсутствуют систематические погрешности. Действительно,

т.е. математическое ожидание среднего арифметического равно истинному значению a, если $M(xk) = a$ для всех k. Однако, при повторяющейся систематической погрешности ?c для всех k $M(xk) = a + ?c$ и . Оценка в данном случае окажется смещённой на величину систематической погрешности ?c. Это доказывает, что вычисление среднего арифметического при увеличении числа наблюдений не уменьшает эффекта действия систематической погрешности на результат усреднения.